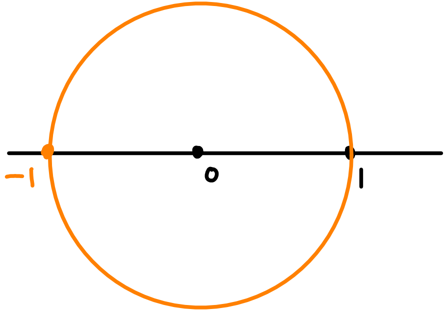
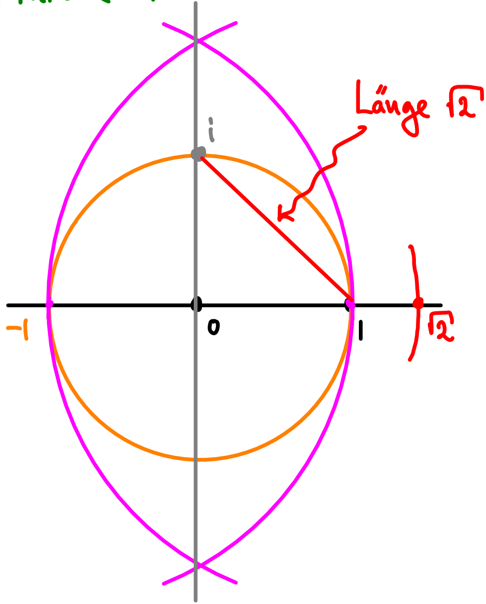
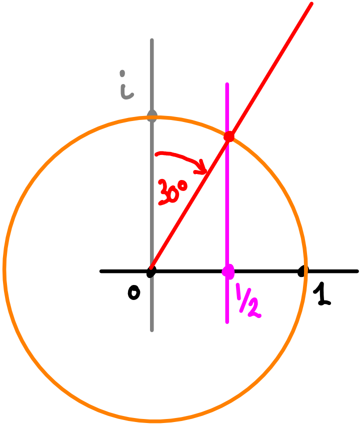
# Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

ZB.: gegeben $0, 1 \in \mathbb{C}$ konstruiere $\sqrt{2}$



z.B. geg. 0, 1, konstruiere $i$ und 3-Teilung des Winkels $\underset{0}{\overset{i}{\perp}}{}_{1}$ (d.h. Winkel 30°, 60°)




- konstruiere $\frac{1}{2}$ und Senkrechte durch ½
- Gerade durch Schnittpunkt mit Kreis gibt 30° mit imaginärer Achse.

Fragen:

- Können wir jeden Winkel mit Zirkel und Lineal dreiteilen?
- Kann man $\sqrt[3]{2}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren?
- Kann man ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt wie der Einheitskreis konstruieren?

Wollen definieren $(M \subset \mathbb{C})$

$A_M$ = „Punkte in $\mathbb{C}$, die sich mit Zirkel und Lineal aus $M$ konstruieren lassen."

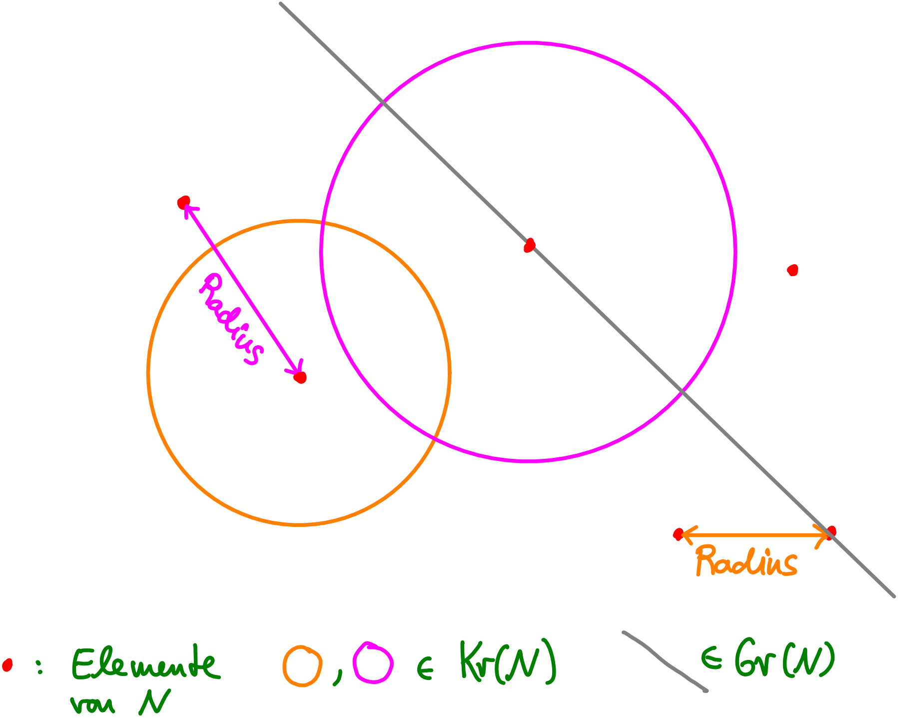
Genauer: Für $N \subset \mathbb{C}$ sei

$Gr(N) = \{$ Geraden in $\mathbb{C}$, die $\geq 2$ Punkte von $N$ enthalten $\}$

$Kr(N) = \{$ Kreise mit Mittelpunkt in $N$ und Radius gleich dem Abstand zweier Punkte in $N$ $\}$

Z.B.: Für Konstruierbarkeitsfragen von der vorherigen Folie:

$M = \{0, 1\}$


Radius
Radius
: Elemente von N
, ∈ Kr(N)
∈ Gr(N)

**Def.:** Sei $M \subset \mathbb{C}$. $\mathcal{A}M$ ist die kleinste Teilmenge von $\mathbb{C}$, für die gilt:

1) $M \subset \mathcal{A}M$

2) $\forall\, \lambda, \lambda' \in Gr(\mathcal{A}M),\ \lambda \neq \lambda' \Rightarrow \lambda \cap \lambda' \subset \mathcal{A}M$
(Schnittpunkte von Geraden durch Punkte in $\mathcal{A}M$)

3) $\forall\, \lambda \in Gr(\mathcal{A}M),\ \kappa \in Kr(\mathcal{A}M) \Rightarrow \lambda \cap \kappa \subset \mathcal{A}M$
(Schnittpunk Gerade – Kreis)

4) $\forall\, \kappa, \kappa' \in Kr(\mathcal{A}M),\ \kappa \neq \kappa' \Rightarrow \kappa \cap \kappa' \subset \mathcal{A}M$
(Schnittpunkte von Kreisen)

Rekursive Konstruktion von $\mathcal{A}M$:

Setze $M_0 := M$

$M_{i+1} =$ „$M_i$ und alle Punkte, die sich via 2) – 4) aus $M_i$ ergeben."

Dann

$$\mathcal{A}M = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$$

## Satz 1

Sei $M \subset \mathbb{C}$. Angenommen, $0, 1 \in M$. Dann ist $\mathcal{A}M$ ein Körper, der

- $i \in \mathbb{C}$ enthält,
- unter komplexer Konjugation abgeschl. ist

## Bew:

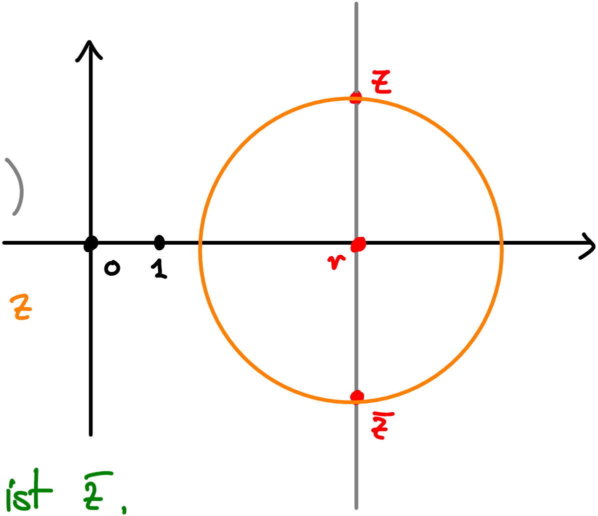
1) $i \in \mathcal{A}M$: Wie im Anfangsbeispiel zu $\sqrt{2}$

2) $z \in \mathcal{AM} \Rightarrow \bar{z} \in \mathcal{AM}$:

Lot durch $z$ auf
x-Achse
(Wie mit Zirkel & Lin.?)

Kreis um $r$ durch $z$

Zweiter Schnittpunkt
von Kreis und Lot ist $\bar{z}$.

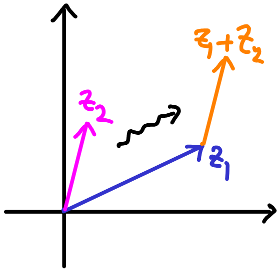


3) $z \in AM \Rightarrow -z \in AM$ : ✓ (Wie)

4) $z_1, z_2 \in AM \Rightarrow z_1 + z_2 \in AM$

Konstruiere Parallelverschiebung

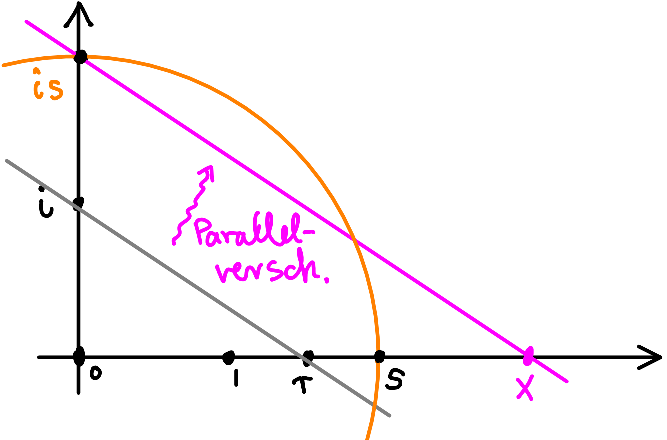
(Wie?)



5) $z, w \in \mathcal{AM} \Rightarrow z \cdot w \in \mathcal{AM}$

<u>Beh.</u>: $r, s \in \mathbb{R} \cap \mathcal{AM} \Rightarrow r \cdot s \in \mathcal{AM}$

$\ulcorner$ OBdA $r, s > 0$. $x = rs \Leftrightarrow \frac{x}{s} = \frac{r}{1}$




$\lrcorner$

Zeige

- $z \in AM \Rightarrow \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \in AM$
- $r \in AM \Leftrightarrow ir \in AM$
- $z \in AM \Rightarrow \operatorname{Im} z = \frac{1}{i}(z - \operatorname{Re} z) \in AM$

(Details?)

Dann, mit $z = a + ib$, $w = c + id$:

$$z \cdot w = \underbrace{(ac - bd)}_{\in AM} + i\,(\underbrace{ad + bc}_{\in AM})$$

6) $z \in AM,\ z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} \in AM$

Beh.: $r \in \mathbb{R} \cap AM,\ r > 0 \Rightarrow r^{-1} \in AM$

$\ulcorner$ wie Beh. in 5 mit $\frac{x}{1} = \frac{1}{r}$ $\lrcorner$

Dann

$$z^{-1} = \underbrace{\underbrace{\bar{z}}_{2)} \cdot \underbrace{(\underbrace{z \cdot \bar{z}}_{2)\,\&\,5)})^{-1}}_{\text{Beh}}}_{5)} \in AM$$

$\square$

**Def** Ein Körper $K$ heißt <u>quadratisch abgeschlossen</u>, falls jedes $f \in K[X]$ von Grad 2 in $K[X]$ in Linearfaktoren zerfällt.

**Satz 2**

Sei $M \subset \mathbb{C}$ mit $0, 1 \in M$. Dann ist $\mathcal{A}M$ quadratisch abgeschlossen.

Sei $M \subset \mathbb{C}$ mit $0,1 \in M$ und

$$K = \mathbb{Q}(M \cup \bar{M})$$

<u>Bem. 3</u> $K \subset \mathcal{A}M$ und $\mathcal{A}K = \mathcal{A}M$ (Warum?)

<u>Satz 4</u> Für $z \in \mathbb{C}$ sind äquivalent

1) $z \in \mathcal{A}M$

2) Es gibt eine Kette

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_m = L$$

von Teilkörpern in $\mathbb{C}$ s.d. $z \in L$ und

$$K_{i+1} = K_i(a_i) \text{ mit } \operatorname{grad} m_{a_i, K_i} = 2$$

## Kor. 5

Sei $\{0,1\} \subset M \subset \mathbb{C}$, $K = \mathbb{Q}(M \cup \overline{M})$

Sei $z \in \mathcal{A}M$. Dann

- $z$ ist algebraisch über $K$,
- $[K(z) : K] = 2^k$ für ein $k \geq 0$.

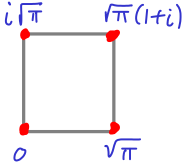
**Bem.** Die Umkehrung von Kor. 5 gilt nicht.

**Bsp.** für $z \in \mathbb{C}$, aber $z \notin \mathcal{A}M$, $M = \{0,1\}$:

1) $z = \sqrt[n]{2}$, $n \neq 2^k$

Kann man $\sqrt[3]{2}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren? → Nein.

2) $z = \sqrt{\pi}$ : Quadrat mit Fläche $\pi$ :




Kann man ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt wie der Einheitskreis konstruieren? → Nein.

3) Winkel $\frac{2\pi i}{p}$, also $z = e^{2\pi i/p}$, wobei $p > 2$ prim und $p \neq 2^k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$ (Warum?)

Können wir jeden Winkel mit Zirkel und Lineal dreiteilen? → Nein.